



Control 2

15 de Octubre, 2004

Pregunta 1

Se juega la final del campeonato chileno de fútbol entre los equipos de San Felipe y Temuco. Este año, la sorprendente e imaginativa dirigencia de la ANFPE ha decidido implementar una nueva forma de definición de campeonato. Los equipos jugarán un partido tras otro hasta que alguno de los dos logre la suma de tres victorias consecutivas. Adicionalmente cada uno de los partidos de la final se definirá mediante lanzamientos penales en el caso de terminar en un empate. Esto significa que los únicos resultados posibles para cada partido son victoria para San Felipe o victoria para Temuco. Considere que la probabilidad de victoria (incluye definición a penales) de Temuco en cada partido es 0,6.

La dirigencia de la ANFPE, que espera llenar de público cada uno de los partidos de la final, desea saber cuál es el número esperado de partidos que se disputarán, de forma de decidir cuánto dinero se destinará a publicitar los encuentros.

1. Construya una cadena de Markov en tiempo discreto que le permita calcular el número esperado de encuentros. Clasifique los estados de esta cadena e identifique sus clases.
2. En base a la cadena el punto anterior calcule el número esperado de partidos que se jugarán y la probabilidad que Temuco se titule campeón del fútbol chileno.

Para la dirigencias de Temuco y San Felipe las cosas no son tan simples. Ellos saben que dependiendo de si juegan de local o visita, la probabilidad de victoria cambia. Saben que si su equipo juega de local la probabilidad de ganar es $\frac{1}{2}$, mientras que las probabilidades de empatar y perder son $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{4}$. Además, han logrado convencer a la ANFPE de permitir resultados de empate, de forma de prolongar la definición del campeonato¹. Notamos que en esta situación ambos equipos son igualmente poderosos.

Las bases del campeonato indican que si en una fecha un equipo juega de local, en la próxima fecha debe jugar de visita. Además, suponga que cada equipo percibe una ganancia de $\$X$ por cada partido que se juega en su estadio, que no percibe ganancias por jugar de visita, y que recibe un premio de $\$P$ por titularse campeón.

3. Modele esta nueva situación como una cadena de Markov en tiempo discreto.
4. Calcule cuánto es el monto máximo que está dispuesto a pagar cada uno de estos equipos por el hecho de comenzar a disputar la final como local. Especifique su razonamiento.

Pregunta 2

1. La ANFPE ha encargado a ArmijoTicket la venta de entradas para el partido entre Chile y Argentina. El lugar de venta de entradas cuenta con C vendedores en paralelo y opera con una fila única con capacidad para R personas. Los hinchas llegan según un proceso de Poisson de tasa λ [hinchas/hora].

¹Un empate terminará con las victorias consecutivas de ambos equipos, es decir la condición de adjudicación del campeonato pasa por lograr tres triunfos consecutivos sin empates entre ellos.

Si al llegar una persona a **ArmijoTicket**, hay j hinchas en la fila, entra al sistema con probabilidad p_j , y en caso contrario, se va ($p_0 = 1$). Una vez en la fila, un cliente espera hasta que es atendido o hasta que se acaba su paciencia. Se sabe que, para cada cliente, el tiempo que transcurre desde que llega al sistema hasta que se agota su paciencia y decide irse, es una variable aleatoria exponencial de media $1/\mu$ [horas]. Sin embargo, en el momento que el sistema se llena, se enciende una pantalla gigante en la que se exhiben los grandes momentos del fútbol **shileno**. **Armijo** sabe que, cuando la pantalla gigante está encendida, inhibe cualquier señal de aburrimiento por parte de los hinchas, sin embargo, dado que éstos grandes momentos no son muchos los videos se muestran mientras existan personas en cola luego de lo cual la pantalla se vuelve a apagar. Además se sabe que la atención de cada uno de los vendedores, es una variable aleatoria de distribución exponencial de media $1/\beta$ [horas]. Modele el estado de ocupación del local de **Armijo Ticket** como una Cadena de Markov en tiempo continuo. Suponga que la cantidad de entradas puestas a la venta es *muy grande*, por lo que nunca será superada por la demanda.

- Una vez concluida la venta de entradas, la situación el día del encuentro es la siguiente. Una vez que se inicia el partido, se abren las puertas del estadio. Los hinchas **shilenos** llegan según un proceso de Poisson de tasa λ_S [personas/minuto], mientras que los **argentinos** lo hacen según un proceso de Poisson de tasa λ_A [personas/minuto]. En las puertas del recinto una fracción q de los hinchas es revisado por el personal de seguridad, y en caso de portar elementos no permitidos, se le prohíbe el ingreso al estadio. Se sabe que una fracción r_A de los **argentinos** y una fracción r_S de los **shilenos** portan este tipo de artículos. Tanto el tiempo de la revisión, como el de encontrar un asiento son despreciables.

Cada hincha **argentino** permanece en el estadio un tiempo exponencial de media $1/\delta$ [minutos], luego de lo cual se retira independiente del resultado del partido. Por otro lado, cada hincha de **Shile** permanece en el estadio un tiempo exponencial de media $1/\gamma$ [minutos]. Sin embargo, si la cantidad de hinchas **shilenos** es menor o igual a la de hinchas **argentinos**, el amor por la roja inhibe toda intención de abandonar el estadio independiente del resultado.

Por otro lado se sabe que cuando la cantidad de **shilenos** en el estadio es mayor a K hinchas y hay **argentinos** presentes, a intervalos de tiempo exponenciales de media $1/\alpha$ [minutos] el estadio se vuelve una caldera producto del irrefrenable ímpetu de los hinchas chilenos. En este instante, todos los **argentinos** presentes en el estadio prefieren velar por su seguridad y retirarse del recinto.

Por último suponga que la duración del partido es ilimitada. Modele el estado de ocupación del estadio como una cadena de Markov en tiempo continuo. Generalice los casos particulares que permiten representarla.

Pregunta Charlas I. Meilijson (bonus)

En el marco de las dos conferencias dictadas por el Profesor I. Meilijson en nuestro curso, responda a las siguientes preguntas sin entrar en muchos detalles técnicos.

- Describa o defina el modelo matemático conocido como Cadena de Markov Oculta (CMO). Explique la naturaleza de las componentes del modelo y las relaciones entre dichas componentes, los parámetros del modelo y su estimación. Explique además en qué situaciones es recomendable usar una CMO.
- Describa someramente la primera aplicación de CMO presentada (estados cerebrales), las dificultades del modelamiento, los resultados y de su opinión (técnica) personal sobre lo expuesto.
- Describa someramente la segunda aplicación de CMO presentada (cambio dolar-yen), las dificultades del modelamiento, los resultados y de su opinión (técnica) personal sobre lo expuesto.